Repetition Core

◆ 数列 (漸化式と数学的帰納法) ◆

漸化式 (ぜんかしき) は、数列分野の最重要事項の 1 つである。その漸化式で最も重要なのは、一般項を求めることができるかという点である。10 以上のパターンを素早く認識し、各パターンに応じた解法をとる必要がある。パターンは多いが、根本的には、等差・等比・階差の 3 パターンのいずれかに帰着する型がほとんどであり、ポイントをおさえて要領よく学習していけば、それほど網羅は難しくはない。また、常に、「一般項を予想して数学的帰納法で証明する」という最終手段があるということは意識しておいてほしい。

数学的帰納法は自然数 n に関する証明問題において圧倒的な威力を持つ。2 次試験では、自然数 n の命題を見かけた場合、常に数学的帰納法の利用を想定しておかなければならない。最悪証明することができなくても、「$n=1$ を示す」「$n=k$ の場合を仮定しその式を書く」「$n=k+1$ のときの式を書く」という 3 点だけでも記述しておけば部分点をもらえる可能性が高い。

Level			
計算	パターン	答案作成	思考力
△	◎	○	

No Study, No Life. E'z

1　解く前までに自習でやっておいてほしいこと

1. 授業は 1 単元ずつ進んでいくので、授業で扱っていない単元は自習の中で基本問題 (Focus ∗∗∗、チャート∗∗∗まで) だけでも解けるようにしておいてほしい

2　解くときのルール

1. まずは自力で解いてみる
2. 解けなければ、自分の持っている教材で確認しながら解く
3. 今の自分の知識で考えられる立式をしてくる
4. めんどくさい解法でもよいから答えを出す

3　復習のルール

1. 実際に「自分が解いた方法」と「解説で聞いた方法」の着眼点の違いを確認し、もう一度自分で解いてみる。そのときに授業内で理解したポイントが使えているかを確認する
2. 余力がある人は、必ず自分の持っている問題集で類題を 1, 2 題解き、自分のものにしておく

以上のことを守ってほしい

1

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。このとき, $S_1=1,\ S_{n+1}=2S_n-3\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ を満たしている。

(1) S_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

ポイント

2

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が次式で与えられるとする。

$$2S_n=n+1-a_n$$

(1) a_1 と a_2 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表す漸化式を求めよ。

(3) 一般項 a_n を求めよ。

(4) 数列 $\{b_n\}$ を式 $b_n=a_{2n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ で定めるとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ。

ポイント

3

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \dfrac{2}{3},\ a_{n+1} = a_n + 2n - \dfrac{16}{3}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ により定義する。

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。$\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ を n を用いて表せ。
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(3) a_n の値が最小となる n の値とそのときの a_n を求めよ。

ポイント

4

数列 $\{a_n\}$ を次の式 $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ で定める。また、α と β を $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)\ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ を満たす実数とする。ただし、$\alpha < \beta$ とする。

(1) $a_3,\ a_4$ を求めよ。
(2) $\alpha,\ \beta$ を求めよ。
(3) $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対し, $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
(4) $n = 1,\ 2,\ 3 \cdots$ に対し, $c_n = a_{n+1} - \beta a_n$ とおくとき, 数列 $\{c_n\}$ は等比数列である。数列 c_n の公比と一般項を求めよ。
(5) 数列 a_n の一般項を求めよ。

ポイント

5

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = \frac{1}{3}$$
$$a_{n+1} = \frac{1 - a_n}{3 - 4a_n}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。
(2) 一般項 a_n を推測し、それを数学的帰納法で証明せよ。

ポイント

6

次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 4$$
$$a_{n+1} = 4a_n - 2^{n+1}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

ポイント

7

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 2n + 1\ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ。

(1) $b_n = a_n - (\alpha n + \beta)$ とおいて、数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 $\alpha,\ \beta$ の値を定めよ。
(2) 一般項 a_n を求めよ。
(3) 初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

ポイント

8

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を $a_1 = 1,\ b_1 = 2,$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 7b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \end{cases}$$

によって定める。

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ が成立するような定数 $p,\ q$ の組を 2 つ求めよ。

(2) $a_n,\ b_n$ を求めよ。

ポイント

9

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{2{S_n}^2}{2S_n + 1} \quad (n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$ を満たす。ただし, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ である。

(1) a_2 を求めよ。

(2) S_n を S_{n-1} を用いて表せ。

(3) S_n を求めよ。

ポイント

10

条件 $a_1 = 1,\ a_{n+1} - 2a_n = n \cdot 2^{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

ポイント

11

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \dfrac{1}{4},\ a_2 = 1,$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

で定める。

(1) すべての自然数 n について

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)}$$

が成立するように定数 $A,\ B$ を定めよ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ とおく。数列 b_n の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

ポイント

12

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $a_1 = 4,\ b_1 = -1,$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = -a_n + 3b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \end{cases}$$

を満たす。さらに、

$$\begin{cases} a_n + 2b_n = \alpha_n \\ a_n - b_n = \beta_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \end{cases}$$

とおく。

(1) $\alpha_1,\ \beta_1$ を求めよ。

(2) 数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。

ポイント

13

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{12}{n(3n+5)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k\quad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ を満たす。このとき、次の問に答えよ。

(1) 一般項を予想せよ。

(2) (1) の予想を数学的帰納法を用いて示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k a_k}{k}$ を求めよ。

ポイント

14

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=2-\dfrac{1}{n}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ で定義する。

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3$ の値を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 任意の自然数 n に対して $a_n\leq\dfrac{n^2-1}{2n^2}$ が成り立つことを示せ。

ポイント